第 16 章

向量微積分 (Vector Calculus)

目錄

(1) 我們要定義線積分、面積分。

(2) 討論它們和單變數積分、雙重積分和三重積分的關係。

(3) 導出微積分基本定理的高微度推廣, 即線積分基本定理, Green 定理, Stokes 定理及散度定理。

16.1 向量場 (Vector Fields)

向量場

定義 16.1.1. (1) 令 $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ 的向量場 (vector field) 是一個函數 $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$, 將 (x, y) 對應到向量 $\mathbf{F}(x, y)$。

(2) 令 $E \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ 的向量場 (vector field) 是一個函數 $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^3$, 將 (x, y, z) 對應到向量 $\mathbf{F}(x, y, z)$。通常可表爲 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\rangle = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$.

(3) 若其分量函數 P, Q, R 爲連續函數, 則稱其爲連續向量場。

(4) 若其分量函數 P, Q, R 可微, 則稱其爲可微向量場。

例 16.1.2. (1) 令 $\mathbb{R}^2$ 上的向量場 $\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$。描繪其向量場。

(2) 描繪 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$。

例 16.1.3. 描繪以下各 $\mathbb{R}^2$ 上的向量場:

(1) $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \sin x\rangle$,

(2) $\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + x^2), \ln(1 + y^2)\rangle$。

例 16.1.4. 描繪以下各 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場:

(1) $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y, z, x\rangle$,

(2) $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y, -2, x\rangle$,

(3) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle \frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, \frac{z}{4}\right\rangle$。

例 16.1.5. (1) 一流體流經一管子, $\mathbf{v}(x, y, z)$ 表其速度向量, 則得一速度向量場(velocity field)。速率即爲箭頭的長度。

(2) Newton 萬有引力定律: $|\mathbf{F}| = -\frac{mMG}{r^2}$。假設質量 M 之物體是位於原點, 而質量 m 的物體是在 $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ 處, $r = |\mathbf{x}|$。則重力場 (gravitational field) 爲

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\rangle。$$

(3) 電荷 Q 位於原點, 由 Coulomb 定律, 則 Q 對於位在 (x, y, z) 的電荷 q 所作用的電力爲 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$。令 $\mathbf{E} = \frac{1}{q}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$, 稱爲 Q 的電場 (electric field)。

保守場

定義 16.1.6. 若 f 爲多變數函數, 則 ∇f 爲梯度場 (gradient field)。

例 16.1.7. 求 $f(x, y) = x^2y - y^3$ 的梯度場。

定義 16.1.8. 若一個向量場 $\mathbf{F}$ 是某個純量函數 f 的梯度場, 即 $\mathbf{F} = \nabla f$, 則稱 $\mathbf{F}$ 爲保守場 (conservative vector field), f 稱爲 $\mathbf{F}$ 的位勢函數 (potential function)。

例 16.1.9. 令 $f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 則 ∇f 即爲重力場, 所以重力場是保守場。

定義 16.1.10. 一個向量場的流線 (flow line or streamline) 是一個粒子在向量場中移動的路徑, 此向量場即爲其運動的速度場。

例 16.1.11. 令 $\mathbb{R}^2$ 上的向量場 $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, -y\rangle$。

(a) 若一條流線的參數式是 $x = x(t), y = y(t)$, 則它滿足 $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = -y$。

(b) 求通過 $(1, 1)$ 之流線的方程式。

(c) 若向量場爲 $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, x\rangle$。求通過 $(0, 0)$ 之流線的方程式。

16.2 線積分 (Line Integrals)

線積分

定義 16.2.1. 在空間中, $f(x,y,z)$ 為一實值函數, 其定義域為 D, 曲線 $C:\mathbf{r}(t)=\langle g(t),h(t),k(t)\rangle$, $t\in[a,b]$ 為包含在 D 中的曲線。於是 $f(g(t),h(t),k(t))$ 為定義在 $[a,b]$ 上的函數。將曲線 C 分割為 n 段 $s_1,\cdots,s_n$, 其長度為 $\triangle s_1,\cdots,\triangle s_n$, 在每一段上任取一樣本點 (x_k^*,y_k^*,z_k^*), 則得 Riemann 和 $\sum_{k=1}^n f(x_k^*,y_k^*,z_k^*)\triangle s_k$。令 $P=\max\{\triangle s_k\}$, 若極限 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(x_k^*,y_k^*,z_k^*)\triangle s_k$ 存在, 則定義它是 $f(x,y,z)$ 在 C上 的線積分 (line integral of f along C), 記為 $\int_C f(x,y,z)ds$ 。

註 16.2.2. (1) (線積分計算法) 若 $\mathbf{r}(t)$ 為平滑, 則 $s(t)=\int_a^t|\mathbf{v}(\tau)|d\tau$ 。故

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|dt$$

$$=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt。$$

(2) 對平面上的曲線和函數也可同樣定義線積分。
(3) 若 C 為有限條平滑曲線 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 的聯集, 即 C 是逐段平滑曲線, 則 $\int_C f(x,y)\,ds=\int_{C_1} f(x,y)\,ds+\ldots+\int_{C_n} f(x,y)\,ds$。

例 16.2.3. (1) 令 C 為 $x^2+y^2=1$ 的上半圓, 求 $\int_C (2+x^2y)\,ds$。

(2) C_1 是 $y=x^2$ 上從 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧, C_2 是從 $(1,1)$ 到 $(1,2)$ 的線段, C 是它們的聯集。求 $\int_C 2xds$。

例 16.2.4. (1) 若 C 為連接原點到 $(1,1,1)$ 的線段, $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ 。求 $f(x,y,z)$ 在 C 上的線積分 。

(2) C 為從 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,0)$, 再到 $(1,1,1)$ 之折線段 。求 $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ 在 C 上的線積分。

例 16.2.5. (1) C 為 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, 求 $\int_C(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$。

(2) C 為 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, 求 $\int_C |y|ds$。

(3) C 為 $y=a\cosh\frac{x}{a}$, 求 $\int_C \frac{ds}{y^2}$。

(4) 若 C 為 $\langle\cos t,\sin t,t\rangle$,$t\in[0,2\pi]$, 求 $\int_C y\sin z ds$。

例 16.2.6. C 為 $x^2+y^2=z^2$ 與 $y^2=ax$ $(a>0,)$ 之交線上, 從 $(0,0,0)$到 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 的曲線段, 求 $\int_C zds$。

線積分的應用

定義 16.2.7. 若一金屬線位於空間平滑曲線 C 上, 其密度為 $\delta(x,y,z)$, 則

(1) 質量為 $M=\int_C\delta(x,y,z)ds$。

(2) 對座標面的一次矩為 $M_{yz}=\int_C x\delta ds, M_{xz}=\int_C y\delta ds, M_{xy}=\int_C z\delta ds$。

(3) 質心 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ 爲 $\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$。

(4) 對座標軸及一般直線之二次矩 $I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta ds$, $I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta ds$, $I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta ds$, $I_L = \int_C r^2 \delta ds$, 其中 $r(x, y, z)$ 爲 (x, y, z) 到直線 L 的距離。

(5) 對直線 L 的迴轉半徑爲 $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$。

例 16.2.8. 一金屬線形狀爲 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, 其任一點的密度與它和 $y = 1$ 的距離成正比。求其質心 。

例 16.2.9. 一金屬線形狀爲 yz-平面上的半圓 $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, 其密度爲 $\delta(x, y, z) = 2 - z$ 。求其質心 。

例 16.2.10. 有一金屬線爲 $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 4t, \sin 4t, t \rangle, t \in [0, 2\pi]$, 密度 $\delta = 1$ 。求其質量, 對 z 軸的二次矩及迴轉半徑。

例 16.2.11. 一座牆其底爲 $x = 10\cos t, y = 10\sin t$, 在 (x, y) 處牆高爲 $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, 則牆的面積爲多少?

<u>對 x, y 的線積分</u>

定義 16.2.12. (1) f 沿著 C 對 x 的線積分爲 $\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$。

(2) f 沿著 C 對 y 的線積分爲 $\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$。

註 16.2.13. (1) $\int_C f(x, y)\, ds$可稱爲對弧長的線積分。

(2) P 對 x 及 Q 對 y 之線積分的和可記爲 $\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$。

例 16.2.14. 令 C_1 爲從 $(-5, -3)$ 到 $(0, 2)$ 的線段, C_2 是拋物線 $x = 4 - y^2$ 上, 從 $(-5, -3)$ 到 $(0, 2)$ 的弧。求 $\int_{C_1} y^2 dx + x dy$ 及 $\int_{C_2} y^2 dx + x dy$。

例 16.2.15. C_1 是 $(2, 0, 0)$到 $(3, 4, 5)$的線段, C_2 是從 $(3, 4, 5)$到 $(3, 4, 0)$的線段, C 是 C_1 及 C_2 聯集。求 $\int_C y dx + z dy + x dz$。

註 16.2.16. (1) 對一曲線 C, 給定參數式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [a, b]$, 則可決定其賦向(orientation), 以 t 的增加爲其正方向。

(2) $-C$ 代表與 C 相同的曲線, 但其方向是從 C 的終點到起點。

(3) 對弧長的線積分滿足 $\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$, 因爲 $ds > 0$。

(4) 但 $\triangle x$ 和 $\triangle y$ 在 C 的賦向改變時會變號, 故 $\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx$、$\int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$。

<u>向量場的線積分</u>

定義 16.2.17. 令 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的連續力場, 此力作用在一物體上, 將其沿著平滑曲線 C 移動。令 $\mathbf{T}$ 爲 C 的單位切向量, 則所做的功 (work) 爲

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}。$$

例 16.2.18. 求力場 $\mathbf{F}(x,y)=\langle x^2,-xy\rangle$ 沿著四分之一圓 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t\rangle$,$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 所做的功。

例 16.2.19. (a) 力 $\mathbf{F}=\langle y-x^2,z-y^2,x-z^2\rangle$ 沿著曲線 $\mathbf{r}(t)=\langle t,t^2,t^3\rangle$ 作用 , 從 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 所作的功為何?

(b) 若 $\mathbf{r}(t)=\langle t,t,t\rangle$, 則如何?

定義 16.2.20. 令平滑曲線 C 由 $\mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$ 所定義, $\mathbf{T}$ 為 C 的單位切向量。$\mathbf{F}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的連續向量場, 則 $\mathbf{F}$ 沿著 C 的線積分 (the line integral along C) 為 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt=\int_C\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{T}(x,y,z)\,ds$。

例 16.2.21. 求 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{r}(t)=\langle xy,yz,zx\rangle$, 且 C 為 $x=t,y=t^2,z=t^3,\ \ 0\le t\le 1$。

例 16.2.22. 若 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle\sin x\cos y,xz\rangle$, $\mathbf{r}(t)=\langle t^3,-t^2,t\rangle,\ 0\le t\le 1$, 求 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

例 16.2.23. 一物體的質量是 m, 移動的位置函數為 $\mathbf{r}(t)=\langle a\sin t,b\cos t,ct\rangle$, 求這段時間 內對這物體所作的功。

例 16.2.24. (1) 若 $\mathbf{F}=\langle\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\rangle$, C 是 $y=1+x^2$ 上從 $(-1,2)$ 到 $(1,2)$ 曲線段, 求 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 並解釋該結果。

(2) 以力場 $\mathbf{F}=\langle x^2,xy\rangle$ 作用在物體上, 使其沿著 $x^2+y^2=4$ 逆時針繞一周, 求所作的功, 並解釋該結果。

註 16.2.25. (a) 若 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle P,Q,R\rangle$, 則 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$。

(b) 功的五種表法:

$$W=\int_a^b\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_a^b\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_a^b(P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\frac{dz}{dt})dt=\int_a^b Pdx+Qdy+Rdz。$$

(c) $\int_{-C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 因為當 C 變為 $-C$ 時,$\mathbf{T}$ 變為 $-\mathbf{T}$。

例 16.2.26. (a) 一個半徑 8 公尺之圓柱形穀倉, 外圍有螺旋狀扶梯, 轉三圈到 12 公尺高的倉頂。某人重 80 公斤, 提 10 公斤油漆桶到倉頂, 他作了多少功對抗地心引力?

(b) 若該桶穩定的漏出油漆, 到倉頂漏出 4 公斤, 則他作了多少功?

<u>環流量與通量</u>

定義 16.2.27. (1) 若一個曲線之起點與終點相同, 則稱為封閉曲線或線圈 (closed curve or loop)。

(2) 若一個封閉曲線, 除端點外, 本身均不相交, 則稱為簡單曲線 (simple curve)。

定義 16.2.28. 令 $\mathbf{F}$ 為連續速度場, $\mathbf{r}(t)$ 為一曲線, 則沿著這曲線從 a 到 b 的流量(flow) 為 $\int_a^b\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$。此積分稱為流量積分 (flow integral)。若此曲線為封閉線圈 (closed loop), 則此流量稱為此曲線的環流量 (circulation)。

例 16.2.29. 一液體的速度場為 $\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$ 。求它沿著曲線 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle,t\in[0,2\pi]$ 的流量。

例 16.2.30. 求速度場 $\mathbf{F}=\langle x-y,x\rangle$ 沿著封閉曲線 $\mathbf{r}=\langle\cos t,\sin t\rangle,t\in[0,2\pi]$ 的環流量。

定義 16.2.31. $\mathbf{F} = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle$ 爲平面上的連續向量場 , C 爲包含在 $\mathbf{F}$ 之定義域中的 封閉平滑曲線, $\mathbf{n}$ 爲 C 之向外單位法向量 , 則 $\mathbf{F}$ 通過 C 的通量 (flux) 爲 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$。

定理 16.2.32. 令 C 爲平滑封閉參數曲線 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t), \end{cases}$ 且 t 從 a 到 b 爲逆時針方向 。則速度場 $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$ 通過 C 的通量爲 $\oint_C Pdy - Qdx$。

例 16.2.33. 求速度場 $\mathbf{F} = \langle x-y, x\rangle$ 通過圓 $x^2+y^2=1$ 之通量。

16.3 線積分基本定理 (Fundamental Theorem of Line Integrals)

<u>線積分基本定理</u>

定理 16.3.1. (線積分基本定理) 平滑曲線 C 定義爲 $\mathbf{r}(t)$,$t\in[a,b]$。f 爲可微函數,∇f 在 C 上連續, 則

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))。$$

例 16.3.2. 重力場 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$ 對質量 m 之物體沿著平滑曲線從 $(3,4,12)$ 移到 $(2,2,0)$。求所做的功。

<u>路徑獨立</u>

定義 16.3.3. (1) 逐段平滑曲線稱爲*路徑* (path)。

(2) 令 $\mathbf{F}$ 是定義在 D 上的連續向量場。若對任意有相同起迄點之路徑 C_1 及 C_2 均有 $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 則稱線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *爲路徑獨立* (independent of path)。

定理 16.3.4. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 在 D 上爲路徑獨立的充要條件是對任意 D 上的封閉曲線 C, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$。

註 16.3.5. 任意保守場之線積分是路徑獨立的。

定義 16.3.6. (1) 一個區域 D 是*連通的* (connected) 表示其上任兩點均可以用 D 上的路徑加以連接。

(2) 平面上的連通區域 D, 其上任意封閉曲線的內部均只包含 D 的點, 則稱 D 爲*單連通區域* (simply connected)。

定理 16.3.7. 令向量場 $\mathbf{F}$ 在開連通區域 D 上連續。若 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 在 D 上是路徑獨立, 則 $\mathbf{F}$ 在 D 上是保守場。

<u>保守場</u>

定理 16.3.8. 若 $\mathbf{F}(x,y) = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle$ 是保守場, P 及 Q 在 D 上有連續的一階偏導函數, 則在 D 上 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$。

定理 16.3.9. 若 $\mathbf{F}$ 是單連通區域 D 上的向量場, 若 P 及 Q 均有連續的一階偏導數, 且在 D 上 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 則 $\mathbf{F}$ 爲保守場。

定理 16.3.10. 假設 $\mathbf{F}$ 定義在單連通區域上。$\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ 之分量函數有連續的一階偏導函數。則 $\mathbf{F}$ 爲保守場的充分必要條件是 $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。

例 16.3.11. 以下是否爲保守場?

(1) $\mathbf{F}=\langle x-y,x-2\rangle$;

(2) $\mathbf{F}=\langle 3+2xy,x^2-3y^2\rangle$。

例 16.3.12. (a) 若 $\mathbf{F}(x,y)=\langle 3+2xy,x^2-3y^2\rangle$, 求函數 f 使 $\nabla f=\mathbf{F}$。

(b) 求 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 其中 C 是由 $\mathbf{r}(t)=\langle e^t\sin t,e^t\cos t\rangle$,$0\le t\le\pi$ 所定義。

例 16.3.13. 令 $\mathbf{F}(x,y)=\langle\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\rangle$。

(a) 驗證 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。

(b) 求 $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 及 $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 其中 C_1 及 C_2 分別 是單位圓的上半與下半。

(c) 若 C_1 及 C_2 分別爲 $x^2+y^2=1$ 及 $(x-2)^2+y^2=1$, 求 $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 及 $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

(d) 若 C 爲 C_1, C_2 的聯集, C_1 爲 $x^2+y^2=1$ 之上半圓, C_2 爲從 $(-1,0)$ 經 $(-1,-1)$, $(1,-1)$ 到 $(1,0)$ 的折線段, 求 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

(e) 若 C 爲 C_1, C_2 的聯集, C_1 爲 $(x-2)^2+y^2=1$ 之上半圓, C_2 爲從 $(1,0)$ 經 $(2,-1)$, 到 $(3,0)$ 的折線段, 求 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

例 16.3.14. 若 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle y^2,2xy+e^{3z},3ye^{3z}\rangle$, 求函數 f 使 $\nabla f=\mathbf{F}$。

例 16.3.15. 證明 $\mathbf{F}=\langle 2x-3,-z,\cos z\rangle$ 不是保守場。

例 16.3.16. $\mathbf{F}=\langle yz,xz,xy\rangle=\nabla(xyz)$ 是一個保守場 , 求 $\mathbf{F}$ 沿著曲線從 $A(-1,3,9)$ 到 $B(1,6,-4)$ 所做的功 。

例 16.3.17. 證明 $\mathbf{F}=\langle e^x\cos y+yz,xz-e^x\sin y,xy+z\rangle$ 是保守場, 並求其位勢函數。

例 16.3.18. 求 $\int_C ydx+xdy+4dz$, 其中 C 是連接 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,1)$ 的線段。

例 16.3.19. 令 $P=(1,0),Q=(0,1),R=(-1,0),S=(0,-1)$, 曲線 C 從 P 開始沿著 $PQRS$ 繞一圈, 求 $\int_C\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ 。

例 16.3.20. 令 C 爲從 $(1,\pi)$ 到 $(2,\pi)$ 的直線段, 求 $\int_C(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$。

例 16.3.21. 若 $f(x,y)=\sin(x-2y)$, $\mathbf{F}=\nabla f$, 求非封閉曲線 C_1 及 C_2, 使得 (a) $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$, (b) $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=1$。

例 16.3.22. 若 $\mathbf{F}(\mathbf{r})=\frac{c\mathbf{r}}{\mathbf{r}^3}$, c 爲常數, $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$。$\mathbf{F}$ 將一物體從 P_1 移到 P_2, 求所作的功, 以 P_1 及 P_2 到原點之距離表示之。

例 16.3.23. 能量保守定律 (Law of conservation of energy): 若 $\mathbf{F}$ 是保守力場, 其位勢函數爲 $f(x,y,z)$, 其位能定義爲 $P(x,y,z)=-f(x,y,z)$, 則 $W=P(A)-P(B)$。又由牛頓運動定律 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 可得 $W=\frac{1}{2}m|\mathbf{v}(\mathbf{b})|^2-\frac{1}{2}m|\mathbf{v}(\mathbf{a})|^2$, 則 $W=K(B)-K(A)$, 故 $P(A)+K(A)=P(B)+K(B)$。

16.4 Green 定理 (Green's Theorem)

定義 16.4.1. 一個平面封閉曲線 $C:\mathbf{r}(t)$ 若滿足下列條件, 則稱爲正賦向(positive orientation): 當 t 增加時, C 的內部 D 均在其左手側。

定理 16.4.2. (Green) 令 C 爲平面上正賦向, 連續, 逐段平滑, 簡單封閉曲線, D 爲其內部區域。若 P、Q 在包含 D 的開區域上有連續的偏導函數, 則

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dA \text{ 。}$$

[註]

(1) 對正賦向封閉曲線 C,$\int_C Pdx+Qdy$ 可表爲 $\oint_C Pdx+Qdy$。

(2) D 之邊界可表爲 ∂D, 因此上式也可表爲 $\int_{\partial D} Pdx+Qdy$。

註 16.4.3. (Green 定理之通量及環流量型) 令 $\mathbf{F}=\langle P(x,y),Q(x,y)\rangle$ 爲平面上的向量場 。其定義域上有 一簡單封閉, 平滑之曲線 C, 其包圍之區域爲 D 。假設 P,Q 及其一階偏導數函數在包含 D 及 C 之某一開區域上爲 連續 。

(1) (通量-散度或法線型, flux-divergence or normal form) $\mathbf{F}$ 之通過 C 之外通量滿足下 式

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds=\oint_C Pdy-Qdx=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy\text{。}$$

(2) (環流量-旋度或切線型, circulation-curl or tangent form) $\mathbf{F}$ 繞著 C 之逆時針 方向的環流量爲

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy\text{。}$$

例 16.4.4. 令 $\mathbf{F}=\langle x-y,x\rangle,C:\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t\rangle,t\in[0,2\pi]$。驗證 Green 定理。

例 16.4.5. 若 C 爲三角形曲線, 是從 $(0,0)$到 $(1,0)$、$(1,0)$ 到 $(0,1)$、$(0,1)$ 到 $(0,0)$ 的折線段。求 $\int_C x^4dx+xydy$。

例 16.4.6. 求 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{F}=\langle\sqrt{x^2+1},\tan^{-1}x\rangle$, C 爲一三角形從 $(0,0)$ 經 $(1,1)$, $(0,1)$ 到 $(0,0)$。

例 16.4.7. (1) 若 C 爲圓 $x^2+y^2=9$。求 $\oint_C\left(3y-e^{\sin x}\right)dx+\left(7x+\sqrt{y^4+1}\right)dy$。

(2) 若 C 爲橢圓 $4x^2+y^2=4$。求 $\oint_C(2x-x^3y^5)\,dx+x^3y^8dy$。

例 16.4.8. (1) C 是上半平面中,$x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=4$ 之間所圍的半環狀邊界。求 $\oint_C y^2dx+3xydy$。

(2) C 是從 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$ 的直線段接上拋物線 $y=2-x^2$ 從 $(1,1)$ 到 $(-1,1)$ 的部份。求 $\oint_C y^2e^xdx+x^2e^ydy$。

例 16.4.9. 求 $\oint_C xydy-y^2dx$, 其中 C 是第一象限中由 $x=1,y=1$ 所圍出之矩形。

例 16.4.10. 求 $\mathbf{F}=\langle x,y^2\rangle$ 通過由 $x=\pm1,y=\pm1$ 所圍之矩形的外通量 (outward flux)。

例 16.4.11. 求一正向, 簡單, 封閉曲線 C, 使得積分 $\int_C (y^3 - y)dx - 2x^3 dy$ 之值爲最大。

例 16.4.12. (安培電流環場積)

(a) 令 R 爲圓環 $h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 < h < 1$ 。令 $\mathbf{F} = \langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \rangle$ 。驗證 Green 定理的環流量 形式。

(b) 令 K 爲任意包含單位圓之簡單封閉曲線 , 驗證 $\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$。

例 16.4.13. 求 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{F} = \frac{2xy\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^2}$, C 爲任意包圍原點之正向, 簡單, 封閉曲線 。

<u>面積</u>

註 16.4.14. D 的面積爲 $A(D) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$。

例 16.4.15. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之內部面積。

例 16.4.16. 求曲線 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$, 所包圍的區域之面積。

例 16.4.17. 令 D 爲 xy-平面上簡單封閉曲線 C 所圍成的區域, 證明 D 之形心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 爲 $\overline{x} = \frac{1}{2A(D)} \oint_C x^2 dy$, $\overline{y} = \frac{1}{2A(D)} \oint_C y^2 dy$。

16.5 旋度與散度(Curl and Divergence)

<u>旋度</u>

定義 16.5.1. 令 $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場, 若 P、Q、R 的導函數存在, 定義 $\mathbf{F}$ 的旋度 (curl) 爲 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$。

[註] $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ 爲平面上流體的速度場。A 爲其定義域中的小矩形, 考慮 $\mathbf{F}$ 沿著 A 之邊界逆時針方向的環流量 (circulation)。則 $\frac{\text{沿著 } A \text{ 的環流量}}{\text{A的面積}} \approx \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$。

定義 16.5.2. 一向量場 $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ 在 (x, y) 的環流量密度(或旋度的k-分量 circulation density, k-component of the curl) 爲 $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$。

例 16.5.3. 求 $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 - y, xy - y^2 \rangle$ 之旋度的 k-分量。

例 16.5.4. 若 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle$, 求 $\operatorname{curl} \mathbf{F}$。

定理 16.5.5. 若 f 是三變數函數, 且有連續得二階偏導數, 則 $\operatorname{curl}(\nabla f) = 0$。換言之, 若 $\mathbf{F}$ 是保守場, 則 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$。

例 16.5.6. 證明 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle$ 不爲保守場。

定理 16.5.7. 若 $\mathbf{F}$ 爲一向量場, 定義在全部的 $\mathbb{R}^3$ 上, 其分量函數有連續的偏導函數, 且 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$, 則 $\mathbf{F}$ 爲保守場。

例 16.5.8. (a) 證明 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2 \rangle$ 爲保守場。

(b) 求一函數 f 使 $\nabla f = \mathbf{F}$。

例 16.5.9. 令 B 爲繞 z-軸旋轉的剛體 (rigid body), ω 是角速度, $\mathbf{w}=\omega\mathbf{k}$, 令 $\mathbf{v}$ 爲 B 的速度場, 證明 $\operatorname{curl}\mathbf{v}=2\mathbf{w}$ 。

註 16.5.10. (1) 若 $\mathbf{F}$ 爲一流體的速度場, 在流體中 (x,y,z) 附近的粒子, 沿著以 curl $\mathbf{F}$ 爲軸旋轉, curl $\mathbf{F}$ 的長度表示其轉動的快慢。

(2) 若在 P 點 curl $\mathbf{F}=0$, 則流體在 P 點沒有旋轉, 稱作 $\mathbf{F}$ 在 P 爲無旋 (irrotational)。

例 16.5.11. 證明: 形如 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle f(x),g(y),h(z)\rangle$, f,g,h 爲可微函數, 之向量場必爲無旋。

<u>散度</u>

定義 16.5.12. 若 $\mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場, 且 $\frac{\partial P}{\partial x}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$、$\frac{\partial R}{\partial z}$ 均存在, 則 $\mathbf{F}$ 的散度(divergence) 定義爲 $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\mathbf{F}$。

[註] 令 $\mathbf{F}=\langle P,Q\rangle$ 爲平面上流體之速度場, 且在一個區域 R 上, P, Q 均爲連續 。令 $(x,y)\in R$, 且 A 爲一個小矩形以 (x,y) 爲一頂點 。則 $\dfrac{\text{通過 } A \text{ 之邊界的通量}}{A \text{ 之面積}}\approx(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})$。

定義 16.5.13. 向量場 $\mathbf{F}=\langle P,Q\rangle$ 在 (x,y) 的散度或通量密度(divergence, flux density) 爲 $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$。

例 16.5.14. 令 $\mathbf{F}=\langle x^2-y,xy-y^2\rangle$, 求其散度。

例 16.5.15. 若 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle xz,xyz,-yz\rangle$, 求 $\operatorname{div}\mathbf{F}$。

例 16.5.16. 證明每一個 $\mathbb{R}^3$ 上的連續函數都是某個向量場的散度。

定理 16.5.17. 若 $\mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 上的向量場, 且 P、Q、R 有連續的二階偏導數, 則 $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F})=0$。

例 16.5.18. 證明向量場 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle xz,xyz,-y^2\rangle$ 不爲一向量場的旋度場。

定理 16.5.19. (Green定理的向量形式):

(1) $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_{\mathbf{D}}(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}dA$。

(2) $\oint_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds=\iint_D\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)\,dA$。

此處 C 是由 $\mathbf{r}(t)$ 所定義, $\mathbf{n}$ 是單位法向量。

註 16.5.20. (1) $\operatorname{div}\mathbf{F}$ 是衡量一流體在 (x,y,z) 點發散的傾向。若 $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$, 則稱 $\mathbf{F}$ 是不可壓縮的 (incompressible)。

(2) $\operatorname{div}(\nabla\mathbf{F})=\nabla\cdot\nabla\mathbf{F}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ 稱爲 Laplace 算子 (operator)。

(3) 對於向量場 $\mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle,\nabla^2\mathbf{F}=\langle\nabla^2P,\nabla^2Q,\nabla^2R\rangle$。

例 16.5.21. 證明: 形如 $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle f(y,z),g(x,z),h(x,y)\rangle$ 之向量場必爲不可壓縮的。

例 16.5.22. 驗證以下各等式:

(1) $\operatorname{div}(f\,\mathbb{F})=f\cdot\operatorname{div}\mathbb{F}+\mathbb{F}\cdot\nabla f$,

(2) $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F}-\mathbf{F}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{G}$,

(3) $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$,

(4) curl(curl $\mathbf{F}$)=grad(div $\mathbf{F}$) $- \nabla^2 \mathbf{F}$。

例 16.5.23. (1) 令 $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ 及 $r = |\mathbf{r}|$。求以下各式:

(a) $\nabla^2 r^3$。

(b) $\nabla \times \mathbf{r}$。

(c) $\nabla \ln r$。

(2) 若 $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, 是否存在 p 使得 $\text{Div}\, \mathbf{F} = 0$?

例 16.5.24. 若 C, D 滿足 Green 定理的假設, 且 f 及 g 的適當偏導函數存在且連續, 證明下列等式:

(1) Green 第一等式: $\iint_D f\nabla^2 g dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot \mathbf{n} ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g dA$。

(2) Green 第二等式: $\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathbf{n} ds$。

例 16.5.25. (1) 若在 D上, $\nabla^2 g = 0$, 則稱 g 爲調和 (harmonic)。證明若 g 在 D 上調和, 則 $\oint_C D_{\mathbf{n}} g ds = 0$, 其中 C 爲 D 的邊界。

(2) 若 f 在 D 上爲調和函數, 且在 D 之邊界 C 上, $f(x, y) = 0$, 則 $\iint_D |\nabla f|^2 dA = 0$ 。

16.6 參數曲面 (Parametrized Surfaces)

定義 16.6.1. (1) 令 R 爲 uv-平面上之區域 , $\mathbf{r}(u, v) = \langle f(u, v), g(u, v), h(u, v)\rangle$ 爲 R 上的連續向量場 , 且在 R 上爲一對一 。則 $\mathbf{r}$ 的值域 S 稱爲*參數曲面* (parametrized surface)。

(2) $\mathbf{r}$ 以及 R 稱爲 S 的參數化 (parametrization), R 是參數定義域, u, v 爲參數。$\mathbf{r}(u, v)$ 稱爲 S 的向量方程。

(3) 若 $\mathbf{r}(u, v)$ 爲一曲面 S 之向量方程, 固定 $u = u_0$。則定義 S 上之曲線 C_1; 若固定 $v = v_0$, 也定義 S 上之曲線 C_2, 這些曲線稱爲*格子曲線* (grid curve)。

例 16.6.2. (a) 描述向量方程 $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2\cos u, v, 2\sin u\rangle$ 之曲面。

(b) 若 $\theta \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 3$, 其曲面爲何?

例 16.6.3. 描繪曲面 $\mathbf{r}(u, v) = \langle (2+\sin v)\cos u, (2+\sin v)\sin u, u+\cos v\rangle$, u 爲定值之格子曲線爲何? v 爲定值之格子曲線爲何?

例 16.6.4. P_0 點的位置向量爲 $\mathbf{r}_0$, 一平面通過 P_0 且包含兩個非平行的向量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$, 求該平面的向量方程。

例 16.6.5. (1) 求 $z = x^2 + 2y^2$ 之向量方程。

(2) 寫出球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的參數方程式。

(3) 求柱面 $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 1$, 之參數方程式。

(4) 將錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$, 參數化。

(5) 將柱面 $x^2+(y-3)^2=9$, $0\le z\le 5$, 參數化。

(6) 將曲面 $4x^2-4y^2-z^4=4$ 位於 yz-平面前方的部份參數化。

(7) 將球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位於錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上方的部份參數化。

(8) 將平面 $z=x+3$ 位於圓柱面 $x^2+y^2=1$ 內部的部份參數化。

例 16.6.6. 將曲線 $y=f(x)$, $a\le x\le b$ 繞 x 軸旋轉 $(f(x)\ge 0)$。其旋轉面的參數表示爲 $x=x$、$y=f(x)\cos\theta$、$z=f(x)\sin\theta$, $a\le x\le b$ 、$0\le\theta\le 2\pi$。

例 16.6.7. 將曲線 $y=\sin x$, $0\le x\le 2\pi$ 繞 x 軸旋轉, 求旋轉面的參數表示。

16.7 曲面之表面積 (Area of Surfaces)

定義 16.7.1. 一曲面由 $\mathbf{r}(u,v)=\langle x(u,v),y(u,v),z(u,v)\rangle$ 定義。

(1) 若 $(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)(u_0,v_0)\ne 0\ \forall (u_0,v_0)$, 則稱 S 爲平滑。

(2) 通過 $\mathbf{r}(u_0,v_0)$, 且包含向量 $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$、$\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ 之平面稱爲**切平面**。

(3) $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ 爲**法向量**。

例 16.7.2. 求曲面 $x=u^2$、$y=v^2$、$z=u+2v$ 在點 $(1,1,3)$ 之切平面。

定義 16.7.3. 平滑參數曲面 S 由 $\mathbf{r}(u,v)=\langle x(u,v),y(u,v),z(u,v)\rangle$,$(u,v)\in D$ 所定義。當 (u,v) 跑遍 D 時, 其圖形跑遍 S 一次。則 S 的**曲面面積**(surface area) 爲

$$A(S)=\iint_D|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dA\text{ 。}$$

註 16.7.4. (1) 若 S 是由 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$ 所定義。f 有連續的偏導函數。則 S 之面積爲

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dA\text{ 。}$$

(2) 若 $f(x)\ge 0$ 且 $f'(x)$ 爲連續, 將曲線 $y=f(x)$,$a\le x\le b$ 繞 x 軸旋轉所得旋轉面 S, 其面積爲 $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

例 16.7.5. 求半徑爲 a 之球表面積。

[註] 對半徑爲 a 之球, $\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta=a\sin\phi\,\mathbf{r}(\theta,\phi)$, $|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta|=a^2\sin\phi$。

例 16.7.6. (1) 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $z=9$ 之下的部分面積。

(2) 求錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,$0\le z\le 1$, 之側表面積 。

(3) 求曲面 $z=\frac{2}{3}(x^{3/2}+y^{3/2})$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, 的面積。

(4) 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 $x^2+y^2=ax$ 之內的表面積。

例 16.7.7. (1) 半球 $x^2+y^2+z^2=2, z>0$ 被圓柱 $x^2+y^2=1$ 所切出的曲面, 求其面積。

(2) 曲面 $z = xy$ 位於柱面 $x^2 + y^2 = 9$ 之內部, 求其面積。

例 16.7.8. 求曲面 $\mathbf{r}(u,v) = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$, 的面積。

例 16.7.9. 將 xz-平面上, 圓心爲 $(b,0)$, 半徑爲 $a < b$ 之圓, 繞 z-軸旋轉得一環狀面。寫出其參數式, 並求其表面積。

例 16.7.10. 求曲面 $x^2 + z^2 = a^2$ 與 $y^2 + z^2 = a^2$ 相交部分之表面積 。

16.8 面積分 (Surface Integrals)

面積分

定義 16.8.1. 曲面 S 爲 $\mathbf{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$,$(u,v) \in D$。若 D 爲矩形, 將其分割成小矩形 R_{ij}, 其邊長爲 $\triangle u$ 及 $\triangle v$。於是曲面 S 被分成對應的小片 S_{ij}, 在 S_{ij} 上任選樣本點 P_{ij}^* 則可得 Riemann 和 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\triangle S_{ij}$($\triangle S_{ij}$ 爲 S_{ij} 之面積)。則 f 在曲面 S 之面積分爲 $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\triangle S_{ij}$。

定理 16.8.2. 若 S 由 $\mathbf{r}(u,v)$,$(u,v) \in D$ 所定義 (D 不見得是矩形), 且 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ 在 D 的內部不等於 0。則

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA。$$

[註] 若曲面 S 爲 $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$。則

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA。$$

例 16.8.3. (1) 令 S 爲單位球, 求 $\iint_S x^2 dS$。

(2) 令 S 爲曲面 $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, 求 $\iint_S y\,dS$。

(3) 若曲面 S 之側面 S_1 爲柱面 $x^2 + y^2 = 1$, 其底 S_2 爲平面 $z = 0$ 上的圓盤 $x^2 + y^2 \le 1$, 其頂部在平面 $z = 1 + x$ 上。求 $\iint_S z\,dS$。

例 16.8.4. (1) 曲面 S 爲 $z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}})$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, 求 $\iint_S y\,dS$。

(2) 曲面 S 爲 $y = x^2 + z^2$ 位於 $x^2 + z^2 = 4$ 之內部的部分, 求 $\iint_S y\,dS$。

例 16.8.5. (1) $x = 1, y = 1, z = 1$ 在第一卦限切出一立方體, 它在第一卦限部分的表面爲 S。求 $g(x,y,z) = xyz$ 在 S 上的積分 。

(2) 求 $G(x,y,z) = x^2$ 在錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1$, 上的積分。

例 16.8.6. (1) 求 $\iint_S (x^2+y^2)dS$, 其中 S 爲曲面 $\mathbf{r}(u,v) = \langle 2uv, u^2-v^2, u^2+v^2\rangle$, $u^2+v^2 \le 1$。

(2) 求 $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$, 其中 S 爲柱面 $x^2 + y^2 = 9$, $0 \le z \le 2$, 連同其上下底。

面積分的應用

定義 16.8.7. 令S 爲一薄殼, $\delta(x,y,z)$ 爲其密度, 則

(1) 質量 $M=\iint_S \delta(x,y,z)dS$。

(2) 對座標面之一次矩, $M_{yz}=\iint_S x\delta dS, M_{xz}=\iint_S y\delta dS, M_{xy}=\iint_S z\delta dS$。

(3) 質心 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 爲 $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M}, \overline{y}=\frac{M_{xz}}{M}, \overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}$。

(4) 對座標軸之二次矩 $I_x=\iint_S (y^2+z^2)\delta dS, I_y=\iint_S (x^2+z^2)\delta dS, I_z=\iint_S (x^2+y^2)\delta dS$, 對 L 之二次矩 $I_L=\iint_S r^2\delta dS, r(x,y,z)$ 爲 (x,y,z) 到直線 L 的距離。

(5) 對一直線 L 的迴轉半徑爲 $R_L=\sqrt{\frac{I_L}{M}}$。

例 16.8.8. 一個半徑爲 a 之半球殼, 其密度 δ 爲常數, 求其質心。

例 16.8.9. 一個均勻密度的薄片是由錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1, z=2$ 截出, 求其質心。

<u>賦向曲面</u>

定義 16.8.10. 一個曲面 S, 假設在內點上均有切平面, 因此有兩個單位法向量 $\mathbf{n}$ 及 $-\mathbf{n}$。如果我們對每個點 P, 可以適當選取法向量 $\mathbf{n}(P)$ 使得 $\mathbf{n}(P)$ 在 S 上是連續的, 則稱 S 是*賦向曲面* (oriented surface), 所定 $\mathbf{n}$ 之方向稱爲 S 的*方向* (orientation)。因此 一個賦向曲面可以有兩個方向。

註 16.8.11. (1) Mobius band: $\begin{cases} x=2\cos\theta+r\cos\frac{\theta}{2} \\ y=2\sin\theta+r\cos\frac{\theta}{2} \\ z=r\sin\frac{\theta}{2}, \end{cases}$ $-\frac{1}{2}\le r\le\frac{1}{2}$、$0\le\theta\le 2\pi$, 爲非賦向曲面。

(2) 若曲面 S 爲 $z=g(x,y)$, 則一個自然的方向是 $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}\left\langle -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right\rangle$

(3) 若曲面 S 由 $\mathbf{r}(u,v)$ 所定義, 則一個自然的方向是 $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$。

(4) 在球面上 $\mathbf{r}(\theta,\phi)=\langle a\sin\varphi\cos\theta, a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi\rangle$, 則 $\mathbf{n}=\frac{1}{a}\mathbf{r}(\theta,\phi)$。

定義 16.8.12. (1) 如果一個曲面是一個立體 E 的邊界, 則稱爲*封閉曲面* (closed surface)。

(2) 一個封閉曲面的*正向* (positive orientation) 爲其法向量 $\mathbf{n}$ 指向 E 的外側。

<u>向量場的面積分</u>

定義 16.8.13. 若 $\mathbf{F}$ 是賦向曲面 S 上的連續向量場, 其法向量爲 $\mathbf{n}$, 則 $\mathbf{F}$ 在 S 上的*面積分*是

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\ 。$$

這積分稱爲 $\mathbf{F}$ 經過 S 的*通量*(flux)。

註 16.8.14. (1) 若 S 是由 $\mathbf{r}(u,v)$ 所定義, $\mathbf{n}$ 爲自然賦向。則

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA\ 。$$

(2) 若 S 是曲面 $z = g(x, y)$, 則

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \text{ 。}$$

例 16.8.15. 求向量場 $\mathbf{F} = \langle z, y, x \rangle$ 經由單位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的通量。

例 16.8.16. (1) 若 S 是由 $z = 1-x^2-y^2$ 及 $z = 0$ 所圍成之區域的邊界, $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y, x, z \rangle$, 求 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$。

(2) 若 S 是半柱面 $0 \le z \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le x \le 2$, $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$, 求 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$。

(3) 若 S 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \ge 0$, 指向正 y-軸, $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xz, x, y \rangle$, 求 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$。

例 16.8.17. 曲面 S 是由柱面 $y^2 + z^2 = 1, z > 0$ 被 $x = 0$ 及 $x = 1$ 所截出 。求 $\mathbf{F} = \langle 0, yz, z^2 \rangle$ 經由 S 之向外通量 。

例 16.8.18. 求 $\mathbf{F} = \langle yz, x, -z^2 \rangle$ 沿著曲面 $y = x^2, 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 4$, 向外的通量。

例 16.8.19. 令 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$。證明 $\mathbf{F}$ 經由圓心爲原點之球的通量與球的半徑無關。

註 16.8.20. (1) 若 $\mathbf{E}$ 是電場, 則 $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{E}$ 經由曲面 S 的電流量 (electric flux)。Gauss 定律說, 經由封閉曲面的淨電量 (net churge) 是 $Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ (其中 ϵ_0 是一常數)。

(2) 一物體在 (x, y, z) 的溫度是 $u(x, y, z)$, 則熱流 (heat flow) 定義爲 $\mathbf{F} = -k\nabla u$, 其中 k 是該物質的傳導係數 (conductivity), 則通過 S 的熱流率 (rate of heat flow) 爲 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -k \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$。

例 16.8.21. 一個金屬球的溫度與它到球心之距離的平方成正比。求經由球面的熱流率。

16.9 Stokes 定理 (Stokes' Theorem)

定義 16.9.1. (1) 一個曲面 S 的邊界曲線爲 C。由 S 的方向可以衍生 C 的正方向: 若你在 C 上沿著該方向前進, 且你的頭指向 S 的方向 $\mathbf{n}$, 則曲面 S 在你的左側。

(2) 正賦向曲面 S 所定義的賦向曲線 C 記爲 ∂S。

定理 16.9.2. (Stokes) 令 S 爲賦向, 連續, 平滑曲面, 且其邊界 C 是簡單封閉, 連續, 平滑曲線, 並取正賦向。若 $\mathbf{F}$ 爲一向量場, 定義在包含 S 之開區域上, 且它的偏導函數在其上均爲連續。則

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ 。}$$

[註] 若 S 爲平面上的區域, 且賦向向上。則 Stokes 定理化約成 Green 定理。

例 16.9.3. 令 S 爲半球 $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \ge 0, \mathbf{F} = \langle y, -x, 0 \rangle$, 驗證 Stokes 定理。

例 16.9.4. (1) C 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 與 $y + z = 2$ 的交線, 其方向是由上俯視的逆時針方向, $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle -y^2, x, z^2 \rangle$, 求 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$。

(2) 平面 $2x + y + z = 2$ 在第一卦限所截出的平面區域, 其邊界爲 C, 並取由上俯視的逆時針方向。令 $\mathbf{F} = \langle xz, xy, 3xz \rangle$。求 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$。

(3) 令 C 爲 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 所成的三角形, $\mathbf{F}=\langle x+y^2, y+z^2, z+x^2\rangle$。求 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

例 16.9.5. 曲線 C 是平面 $z=2$ 與錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之交線 。求 $\mathbf{F}=\langle x^2-y, 4z, x^2\rangle$ 沿著 C 的逆時針方向 (由上看) 的環流量。

例 16.9.6. (1) S 是在球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上, 位於 $x^2+y^2=1$ 之內, 且在 xy-平面之上的部分, $\mathbf{F}=\langle xz, yz, xy\rangle$, 求 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

(2) S 是頂點爲 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 之立方體的頂部及四個側面, 賦向朝外, $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle xyz, xy, x^2yz\rangle$, 求 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$

例 16.9.7. 求 $\int_C (y+\sin x)dx+(z^2+\cos y)dy+x^3dz$, 其中 C 是曲線 $\mathbf{r}(t)=\langle \sin t, \cos t, \sin 2t\rangle$, $0\le t\le 2\pi$。

例 16.9.8. 令 C 爲位於平面 $x+y+z=1$ 上的簡單封閉平滑曲線, 證明: 線積分 $\int_C zdx-2xdy+3ydz$ 只跟所圍的面積有關, 而跟 C 的形狀和它所在的平面無關。

例 16.9.9. 一平面之單位法向量爲 $\mathbf{n}=\langle a,b,c\rangle$, C 爲平面上簡單, 封閉, 逐段平滑之曲線, 證明: 所圍之面積爲 $\frac{1}{2}\int_C (bz-cy)dx+(cx-az)dy+(ay-bx)dz$。

註 16.9.10. (1) 若賦向曲面 S_1 及 S_2 有同樣的賦向邊界曲線 C, 則 $\iint_{S_1}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S_2}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 上, $\operatorname{curl}\mathbf{F}=0 \Rightarrow \mathbf{F}$ 爲保守場。

(3) 設 f 之二階偏導函數均連續, 則 curl grad f=0, 即 $\nabla\times\nabla f=0$。

16.10 散度定理 (Divergence Theorem)

定義 16.10.1. 若立體區域 E 爲 §15.6 所述之 1,2,3 型, 則統稱爲簡單立體區域 (simple solid region)。

定理 16.10.2. (散度定理, Divergence Theorem) 令 E 爲簡單立體區域, S 是 E 的邊界曲面並取正賦向。$\mathbf{F}$ 定義在包含 E 的開區域上, 且分量函數在其上有連續的偏導函數。則

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}dV \text{ 。}$$

例 16.10.3. 令 S 爲球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, a>0, \mathbf{F}=\langle z,y,x\rangle$。驗證散度定理。

例 16.10.4. 令 S 爲 $x=1, y=1$ 及 $z=1$ 在第一卦限所圍出的立體 , 求 $\mathbf{F}=\langle xy, yz, xz\rangle$ 經由 S 之表面的通量。

例 16.10.5. (1) S 爲由 $z=1-x^2$、平面 $z=0$、$y=0$、$y+z=2$ 所圍成的區域的表面。$\mathbf{F}(x,y,z)=\left\langle xy, y^2+e^{xz^2}, \sin xy\right\rangle$。求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

(2) S 爲單位球之上半, $\mathbf{F}=\langle z^2x, \frac{1}{3}y^3+\tan z, x^2z+y^2\rangle$, 求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

(3) S 爲柱面 $x^2+y^2=1$ 與 $z=x+2$, $z=0$ 所圍成之立體表面, $\mathbf{F}=\langle x^4, -x^3z^2, 4xy^2z\rangle$, 求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

例 16.10.6. 求 $\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 經由曲面 $4x^2+9y^2+6z^2=36$ 的外通量。

例 16.10.7. 利用散度定理求 $\iint_S(2x+2y+z^2)dS$, 其中 S 爲球面 $x^2+y^2+z^2=1$。

例 16.10.8. 令 $\mathbf{F}=\frac{1}{\rho^3}\langle x,y,z\rangle$, 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。區域 D 爲 $0<a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2$ 。求向量場 $\mathbf{F}$ 經由 D 的向外淨通量 (net outward flux)。若 S_a 爲半徑爲 a 之球, 則經由 S_a 的向外通 量爲何？討論兩者之關係。

註 16.10.9. (1) 若有兩封閉曲面 S_1 及 S_2, S_1 位於 S_2 內部, E 爲介於 S_1 及 S_2 之間的立體, 則 $\iiint_E \mathrm{div}\mathbf{F}dV=-\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

(2) Gauss 定律: 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{\epsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$, S 爲任意包含原點的封閉曲面, 則經過 S 的電流量爲 $4\pi\epsilon Q$。

(3) 有一流體密度爲常數 ρ, $\mathbf{v}(x,y,z)$ 爲速度場, $\mathbf{F}=\rho\mathbf{v}$ 是每單位面積的流率 (rate of flow)。則 $\mathrm{div}\mathbf{F}(P_0)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。若 $\mathrm{div}\mathbf{F}(P)>0$, 則 P 稱爲源點 (source), 若 $\mathrm{div}\mathbf{F}(P)<0$, 則 P 稱爲匯點 (sink)。

例 16.10.10. 證明下列各等式: 假設 S 和 E 滿足散度定理的條件, 且所有向量場的分量均有連續的二階偏導數。

(1) $\iint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS=0$, 其中 $\mathbf{a}$ 爲常數向量。

(2) $V(E)=\frac{1}{3}\iint_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$ 。

(3) $\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0$ 。

(4) $\iint_S D_{\mathbf{n}}f dS=\iiint_E\nabla^2 f dV$。

(5) $\iint_S(f\nabla g)\cdot\mathbf{n}dS=\iiint_E(f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g)dV$ 。

(6) $\iint_S(f\nabla g-g\nabla f)\cdot\mathbf{n}dS=\iiint_E(f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)dV$ 。

16.11 統一積分定理 (Unifying the Integral Theorems)

16.11.1. Green 定理的法線形式 $\oint_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds=\iint_R\nabla\cdot\mathbf{F}dA$

散度定理	$\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iiint_D\nabla\cdot\mathbf{F}dV$
Green 定理的切線形式	$\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_R\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}dA$
Stokes 定理	$\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$

16.11.2. The integral of a differential operator acting on a field over a region equals the sum of the field components appropriate to the operator over the boundary of the region.

令 R 爲一區域 , ∂R 爲其邊界, $\mathbf{F}$ 爲一向量場。則

$$\int_R(\text{一可微算子作用在}\mathbf{F}\text{上})dx=\int_{\partial R}(\mathbf{F}\text{之適當分量的和})dx。$$